CALCOLO INFINITESIMALE

SOMMARIO.

I. - *Esercizi sui limiti.*

1. Tipo di funzione algebrica razionale non intera.

2. $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$.

3. $y=x^x$.

4. $y=\left(1+\dfrac{x}{m}\right)^m$.

5. Applicazione alla determinazione di e con sei cifre decimali.

6. Determinare una funzione tale che per due valori qualunque x, y della variabile sussista la relazione:

$$f(x+y)=f(x)-f(y).$$

7. Determiuare una funzione tale per la relazione:

$$f(x,\, y)=f(x)\,.\,f(y).$$

8. Limite di $\dfrac{tx}{1+tx}$.

9. „ x^t.

10. „ $y=\dfrac{x^t-x^{-t}}{x^t+x^{-t}}$, per $t=\infty$.

11. „ $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$, per $x=0$.

12. „ $\dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$ quando x tende a 0.

13. „ $\sqrt{(a+x)(b+x)}-x$ quando x tende ad ∞.

14. „ $y=\sqrt[n]{a_1+x)(a_2+x)\ldots\ldots(a_n+x)}-x$ quando x tende ad ∞.

Esercizi di differenziazione.

15. $y=e^{2x}$.

16. $y=\operatorname{sen} x^2$.

17. $y=\operatorname{sen}(ax+b)$.

18. $y=\log . \log x$.

19. $y=e^{\operatorname{sen} x}$.

20. $y=\log \operatorname{sen} x$.

21. $y=\log \cos x$.

22. $y=\operatorname{arc} . \operatorname{sen}\frac{1}{x}\cdot$

23. $y=\operatorname{arc} . \cos x$.

24. $y=\log\left(x+a+\sqrt{x^2+2ax+b}\right)$.

25. $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot$

26. $\operatorname{sen}(a+b)$, rispetto ad a.

27. $\operatorname{sen} p-\operatorname{sen} q$, rispetto a p.

28. $\operatorname{sen} 2x=2 \operatorname{sen} x \cos x$.

29. $y=\log^n x$.

30. $y=\operatorname{arc} . \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot$

31. $y=(5b^3x^3+30ab^2x^2+40a^2bx+16ax^3)(a+bx)^{\frac{5}{2}}$

32. $y=e^{\operatorname{arc} . \operatorname{sen} x}$.

33. $y=\log\left[1-\left(1-e^{-\frac{a}{\operatorname{sen} x}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$.

34. Derivata della funzione verso cui tende x_n quando n aumenta indefinitamente, essendo:

$$x_1=\sqrt[p]{x\sqrt[q]{x_1}},\qquad x_2=\sqrt[p]{x\sqrt[q]{xx_1}},\ldots\ldots$$

35. $u=\log . \operatorname{tg}\frac{x}{y}\cdot$

36. $u=z^{y^x}$.

37. $u=(x+y+z)^3-(x+y-z)^3-(x-y+z)^3-(y+z-x)^3$.

38. Sia $u=f(x, y, z, t)$ una funzione omogenea delle quantità x, y, z, t, ed $U=F(X, Y, Z, T)$ ciò che essa diventa quando ad x, y, z, t si sostituiscono le funzioni lineari X, Y, Z, T. Dimostrare che sarà:

$$x_1\frac{df}{dx}+y_1\frac{df}{dy}+z_1\frac{df}{dz}+t_1\frac{df}{dt}=X_1\frac{df}{dX}+Y_1\frac{df}{dY}+Z_1\frac{df}{dZ}+T_1\frac{df}{dT},$$

essendo x_1, y_1, z_1, t_1 i valori di x, y, z, t corrispondenti ai valori X_1, Y_1, Z_1, T_1 delle variabili X, Y, Z, T.

39. Dato: $x=a \text{ arc}.\cos\frac{a-y}{a}-(2ay-y^2)^{\frac{1}{2}}$, trovare $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$.

40. $y=(a-bx)^p$.

41. $y=x(a+bx)^{\frac{p}{2}}$.

42. $y=x^p \log x$.

43. $y=\frac{1}{a^2+b^2x^2}$.

44. Differenziale delle equazioni:

$$x=ax_1+by_1+cz_1, \qquad y=a'x_1+b'y_1+c'z_1, \qquad z=a''x_1+b''y_1+c''z_1,$$

essendo $a, b, \ldots . b', \ldots . c''$ funzioni di t. (*Meccanica di* POISSON).

45. $u=F(z)$ supponendo che z cessi di essere variabile indipendente e divenga funzione di un'altra variabile x.

46. $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\varphi'\left[a+\alpha(b-\alpha)\right] \qquad (1>\alpha>0)$.

47. Eliminando u e v fra le equazioni

$$X=f_1(u, v), \qquad Y=f_2(u, v), \qquad Z=f_3(u, v)$$

si ha una relazione

$$F(X, Y, Z)=0.$$

Quali saranno i numeri proporzionali alla derivate del primo ordine della funzione $F(X, Y, Z)$?

II. - *Esercizi sulle serie.*

1. Problema generale.

2. Osservazione sulla serie di Mac-Laurin.

3. Cercare se la serie

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}, \quad \frac{1}{(x+2)(x+3)}, \ldots\ldots$$

è convergente.

4. Trovare la somma S_n dei primi n termini della serie:

$$1^k, 2^k, 3^k, \ldots\ldots n^k.$$

5. Date le due serie convergenti

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n+\ldots\ldots$$
$$\log y=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots\ldots+b_nx^n+\ldots\ldots$$

trovare la relazione esistente fra i loro coefficenti.

6. Sviluppare in serie l'espressione:

$$y=\log\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right],$$

secondo le potenze intere, positive e crescenti della variabile.

7. Determinare le funzioni u e v definite da equazioni date, ecc.

8. Espressione della somma:

$$S=\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(x+a)+\operatorname{sen}(x+2a)+\ldots\ldots$$

9. Espressione della somma per

$$S'=\cos x+\cos(x+a)+\cos(x+2a)+\ldots\ldots$$

10. Espressione del valore di $\operatorname{sen} mx$ e $\cos mx$.

11. Data la funzione interpolare:

$$f(x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots x_n)$$

metterla sotto forma del quoziente di due determinanti.

12. Somma della serie convergente:

$$1, \frac{x}{a+h_1}, \quad \frac{x(x+1)}{(a+h_1)(a+h_2)}, \ldots\ldots$$

13. Limite del prodotto:

$$P_n=\cos a \cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2^n}\ldots\ldots$$

14. Calcolare le somme:

$$\sum_{p=0}^{p=n}\operatorname{sen}(a+p\alpha), \quad \sum_{p=0}^{p=n}\cos(a+p\alpha).$$

15. Sapendo che è:

$$t=\log(a+x)$$

assumere t per variabile indipendente nella relazione ecc.

16. Trasformare

$$\frac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

in un'espressione che non contenga che r e θ, essendo:

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\operatorname{sen}\theta.$$

17. Sia:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=0;$$

sapendo che è;

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad z=r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,$$

assumere r, θ e φ quali variabili indipendenti.

18. Eliminare φ e ψ nell'equazione:

$$z=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+y^n\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

19. Eliminare le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi\,(x)$ nell'equazione:

$$u=\frac{\varphi(x)\,\psi(x)}{[\varphi(x)+\psi(x)]^2}.$$

20. Fra tutti i settori sferici dati in volume, trovare quello la cui superficie totale è la minore possibile.

21. La superficie avente per equazione

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2\,y^2+c^2\,z^2$$

essendo segata da un piano dato passante pel suo centro, cercare le distanze massima e minima di questo centro dal perimetro della sezione.

22. I numeri

$$q=\frac{p}{p_1}<1, \qquad q_1=\frac{p_1}{p_2}, \qquad q_3=\frac{p_2}{p_3}, \ldots\ldots$$

positivi vanno decrescendo: tendono dunque verso un limite L, positivo o nullo (LEMOINE).

23. Somma della serie:

$$1+\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2\,.\,3^2}+\frac{1}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{2^2\,.\,5^3}+\ldots\ldots$$

III. - *Rappresentazione geometrica delle funzioni.*

1. $y=ax+b.$

2. $y=ax^2+bx+c.$

3. $y=\dfrac{1}{x}\cdot$

4. $y=\dfrac{1}{x^2}\cdot$

5. $y=\operatorname{sen} x.$

6. $y=\cos x.$

7. $y=\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\cdot$

8. $y=x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\cdot$

9. $y=\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\cdot$

10. Tangente, normale, ecc. ad una curva.

39. Foglio di CARTESIO.
40. Cissoide di DIOCLE.
41. Curva d'equazione: $y^4+x^4-2a^2y^2-2b^2x^2+b^4=0$.
42. " $y^5+ax^4-b^2xy^2=0$.
43. " $r=a(\operatorname{tg}\theta-1)$.
44. " $r^2=\dfrac{a^2}{\theta}$.

Discussione dell'andamento di alcune curve esponenziali (*rami continui, punteggiati e bipunteggiati*).

1. $y=a^x$.
2. $y=a^{\frac{1}{x}}$.
3. $y=x^x$.
4. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

Inviluppi ecc.

1. Tangente all'inviluppo e alla curva inviluppata.
2. ASTEROIDE.
3. CAUSTICA del cerchio.
4. Parabola d'equazione:

$$y^2=2a\left(x-\frac{a}{2}\right).$$

5. Inviluppo delle ellissi concentriche i cui assi hanno egual direzione, e per le quali la somma di tali assi è costante.

6. Inviluppo delle corde di contatto ottenute conducendo dai punti di una sezione conica qualunque, delle tangenti ad una ellisse d'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

posta nello stesso suo piano.

7. Raggio di curvatura obbliquo.

IV. - ***Curve nello spazio.***

1 a **4.** Tangente, piano normale, ecc.
5 e **6.** Sfera osculatrice.
7. Asse radicale.