

CALCOLO INFINITESIMALE

SOMMARIO.

I. - *Esercizi sui limiti.*

1. Tipo di funzione algebrica razionale non intera.

$$2. \quad y = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}.$$

$$3. \quad y = x^x.$$

$$4. \quad y = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m.$$

5. Applicazione alla determinazione di e con sei cifre decimali.

6. Determinare una funzione tale che per due valori qualunque x, y della variabile sussista la relazione:

$$f(x+y) = f(x) - f(y).$$

7. Determinare una funzione tale per la relazione:

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y).$$

8. Limite di $\frac{tx}{1+tx}$.

9. " x^t .

10. " $y = \frac{x^t - x^{-t}}{x^t + x^{-t}}$, per $t = \infty$.

11. " $\frac{\text{sen } 2x}{x}$, per $x = 0$.

12. " $\frac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}$ quando x tende a 0.

13. " $\sqrt{(a+x)(b+x)} - x$ quando x tende ad ∞ .

14. " $y = \sqrt[n]{a_1+x)(a_2+x) \dots (a_n+x)} - x$ quando x tende ad ∞ .

Esercizi di differenziazione.

15. $y=e^{2x}$.

16. $y=\text{sen } x^2$.

17. $y=\text{sen}(ax+b)$.

18. $y=\log . \log x$.

19. $y=e^{\text{sen } x}$.

20. $y=\log \text{sen } x$.

21. $y=\log \cos x$.

22. $y=\text{arc} . \text{sen} \frac{1}{x}$.

23. $y=\text{arc} . \cos x$.

24. $y=\log (x+a+\sqrt{x^2+2ax+b})$.

25. $y=\frac{\text{sen } x}{x}$.

26. $\text{sen}(a+b)$, rispetto ad a .

27. $\text{sen } p - \text{sen } q$, rispetto a p .

28. $\text{sen } 2x=2 \text{sen } x \cos x$.

29. $y=\log^n x$.

30. $y=\text{arc} . \text{sen} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

31. $y=(5b^3x^3+30ab^2x^2+40a^2bx+16ax^3)(a+bx)^{\frac{5}{2}}$

32. $y=e^{\text{arc} . \text{sen } x}$.

33. $y=\log \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{a}{\text{sen } x}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$.

34. Derivata della funzione verso cui tende x_n quando n aumenta indefinitamente, essendo:

$$x_1 = \sqrt[p]{\frac{q}{x \sqrt{x_1}}}, \quad x_2 = \sqrt[p]{\frac{q}{x \sqrt{xx_1}}, \dots}$$

35. $u=\log . \text{tg} \frac{x}{y}$.

36. $u=zy^x$.

37. $u=(x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (x-y+z)^3 - (y+z-x)^3$.

38. Sia $u=f(x, y, z, t)$ una funzione omogenea delle quantità x, y, z, t , ed $U=F(X, Y, Z, T)$ ciò che essa diventa quando ad x, y, z, t si sostituiscono le funzioni lineari X, Y, Z, T . Dimostrare che sarà:

$$x_1 \frac{df}{dx} + y_1 \frac{df}{dy} + z_1 \frac{df}{dz} + t_1 \frac{df}{dt} = X_1 \frac{df}{dX} + Y_1 \frac{df}{dY} + Z_1 \frac{df}{dZ} + T_1 \frac{df}{dT},$$

essendo x_1, y_1, z_1, t_1 i valori di x, y, z, t corrispondenti ai valori X_1, Y_1, Z_1, T_1 delle variabili X, Y, Z, T .

39. Dato: $x = a \arccos \frac{a-y}{a} - (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}$, trovare $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$.

40. $y = (a - bx)^p$.

41. $y = x(a + bx)^{\frac{p}{2}}$.

42. $y = x^p \log x$.

43. $y = \frac{1}{a^2 + b^2 x^2}$.

44. Differenziale delle equazioni:

$$x = ax_1 + by_1 + cz_1, \quad y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \quad z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1,$$

essendo $a, b, \dots, b', \dots, c''$ funzioni di t . (*Meccanica di POISSON*).

45. $u = F(z)$ supponendo che z cessi di essere variabile indipendente e divenga funzione di un'altra variabile x .

46. $\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} = \varphi' \left[a + \alpha(b - a) \right] \quad (1 > \alpha > 0)$.

47. Eliminando u e v fra le equazioni

$$X = f_1(u, v), \quad Y = f_2(u, v), \quad Z = f_3(u, v)$$

si ha una relazione

$$F(X, Y, Z) = 0.$$

Quali saranno i numeri proporzionali alla derivate del primo ordine della funzione $F(X, Y, Z)$?

II. - *Esercizi sulle serie.*

1. Problema generale.

2. Osservazione sulla serie di Mac-Laurin.

3. Cercare se la serie

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}, \quad \frac{1}{(x+2)(x+3)}, \dots$$

è convergente.

4. Trovare la somma S_n dei primi n termini della serie:

$$1^k, 2^k, 3^k, \dots, n^k.$$

5. Date le due serie convergenti

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$\log y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

trovare la relazione esistente fra i loro coefficienti.

VIII

6. Sviluppare in serie l'espressione:

$$y = \log \left[x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right],$$

secondo le potenze intere, positive e crescenti della variabile.

7. Determinare le funzioni u e v definite da equazioni date, ecc.

8. Espressione della somma:

$$S = \sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \dots$$

9. Espressione della somma per

$$S' = \cos x + \cos(x+a) + \cos(x+2a) + \dots$$

10. Espressione del valore di $\sin mx$ e $\cos mx$.

11. Data la funzione interpolare:

$$f(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)$$

metterla sotto forma del quoziente di due determinanti.

12. Somma della serie convergente:

$$1, \frac{x}{a+h_1}, \frac{x(x+1)}{(a+h_1)(a+h_2)}, \dots$$

13. Limite del prodotto:

$$P_n = \cos a \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^n} \dots$$

14. Calcolare le somme:

$$\sum_{p=0}^{p=n} \sin(a+p\alpha), \quad \sum_{p=0}^{p=n} \cos(a+p\alpha).$$

15. Sapendo che è:

$$t = \log(a+x)$$

assumere t per variabile indipendente nella relazione ecc.

16. Trasformare

$$\frac{x \frac{dy}{dx} - y}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

in un'espressione che non contenga che r e θ , essendo:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

17. Sia:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0;$$

sapendo che è;

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta \cos \varphi,$$

assumere r , θ e φ quali variabili indipendenti.

18. Eliminare φ e ψ nell'equazione:

$$z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^n \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

19. Eliminare le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ nell'equazione:

$$u = \frac{\varphi(x) \psi(x)}{[\varphi(x) + \psi(x)]^2}.$$

20. Fra tutti i settori sferici dati in volume, trovare quello la cui superficie totale è la minore possibile.

21. La superficie avente per equazione

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$$

essendo segata da un piano dato passante pel suo centro, cercare le distanze massima e minima di questo centro dal perimetro della sezione.

22. I numeri

$$q = \frac{p}{p_1} < 1, \quad q_1 = \frac{p_1}{p_2}, \quad q_2 = \frac{p_2}{p_3}, \dots$$

positivi vanno decrescendo: tendono dunque verso un limite L , positivo o nullo (LEMOINE).

23. Somma della serie:

$$1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5^3} + \dots$$

III. - *Rappresentazione geometrica delle funzioni.*

1. $y = ax + b.$

2. $y = ax^2 + bx + c.$

3. $y = \frac{1}{x}.$

4. $y = \frac{1}{x^2}.$

5. $y = \text{sen } x.$

6. $y = \text{cos } x.$

7. $y = \text{sen } \frac{1}{x}.$

8. $y = x \text{ sen } \frac{1}{x}.$

9. $y = \frac{1}{x} \text{ sen } \frac{1}{x}.$

10. Tangente, normale, ecc. ad una curva.

- 11.** Coordinate polari.
- 12.** Modo di comportarsi di una curva nelle vicinanze della tangente.
- 13.** Notazione parametrica.
- 14.** Tangente in un punto della curva.
- 15.** Tangente in un punto di una data conica.
- 16.** Sottotangente di $x = e^{\frac{x-y}{v}}$.
- 17.** Pei punti in cui una delle tangenti ad una parabola incontra le due altre, conduciamo delle parallele a queste. Mostrare che l'incontro di tali parallele avverrà sulla retta di contatto.
- 18.** Date tre curve, trovare su ciascuna un punto tale che il triangolo da essi determinato sia di superficie massima o minima.
Caso in cui le tre curve si riducono ad una stessa ellisse.
- 19.** Condurre ad una ellisse una normale tale che la parte di questa compresa nella curva sia la maggiore o la minore possibile (BONNET).
- 20.** Tangente alla curva: $f(\alpha) = \frac{1}{r}$.
- 21.** Cerchio osculatore.
- 22.** Idem.
- 23.** Centro di curvatura.
- 24.** Evolvente ed evoluta.
- 25.** Proprietà dell'evoluta.
- 26.** Dato il parametro di un punto di una curva nel quale è conosciuto il cerchio osculatore, e quello di un secondo punto nelle vicinanze del primo, determinare se questo secondo punto sarà interno od esterno al sopradetto cerchio osculatore.
- 27.** Applicazione-Ellissi.
- 28.** Cerchio osculatore in un suo vertice.
- 29.** Evoluta della parabola.
- 30.** Cicloide.
- 31.** Catenaria.
- 32.** Epicicloide.
- 33.** Espressione di R .
- 34.** La differenza fra l'inversa della lunghezza della normale e l'inversa del raggio di curvatura è indipendente da b , quando l'equazione della curva soddisfa alla relazione.....
- 35.** Contatto d'ordine n .
- 36.** Determinazione del cerchio osculatore in un punto di una curva mediante la definizione di contatto.
- 37.** Massimo e minimo del raggio di curvatura.
- 38.** Punto isolato.

- 39.** Foglio di CARTESIO.
- 40.** Cissoide di DIOCLE.
- 41.** Curva d'equazione: $y^4+x^4-2a^2y^2-2b^2x^2+b^4=0$.
- 42.** " $y^5+ax^4-b^2xy^2=0$.
- 43.** " $r=a(\operatorname{tg} \theta - 1)$.
- 44.** " $r^2=\frac{a^2}{\theta}$.

Discussione dell'andamento di alcune curve esponenziali (rami continui, punteggiati e bipunteggiati).

- 1.** $y=a^x$.
- 2.** $y=a^{\frac{1}{x}}$.
- 3.** $y=x^x$.
- 4.** $y=x^{\frac{1}{x}}$.

Inviluppi ecc.

- 1.** Tangente all'inviluppo e alla curva inviluppata.
- 2.** ASTEROIDE.
- 3.** CAUSTICA del cerchio.
- 4.** Parabola d'equazione:

$$y^2=2a\left(x-\frac{a}{2}\right).$$

5. Inviluppo delle ellissi concentriche i cui assi hanno egual direzione, e per le quali la somma di tali assi è costante.

6. Inviluppo delle corde di contatto ottenute conducendo dai punti di una sezione conica qualunque, delle tangenti ad una ellisse d'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

posta nello stesso suo piano.

- 7.** Raggio di curvatura obbliquo.

IV. - Curve nello spazio.

- 1 a 4.** Tangente, piano normale, ecc.
- 5 e 6.** Sfera osculatrice.
- 7.** Asse radicale.

- 8.** Intersezione di due superfici.
9. Piano tangente all'ellissoide.
10. Curvatura positiva e negativa.
11. Teoremi di MEUNIER e d'EULERO.
12. Conseguenze.
13. Punto *ciclico* od *ombelico*.
14. Metodo di O. BONNET.
15 a 17. Elemento lineare compreso fra due punti infinitamente vicini di una superficie.
18. Linee di curvatura.
19. " dell'ellissoide.
20. Angolo di due normali infinitamente vicine.
21. Espressione delle linee di curvatura della superficie rappresentata dall'equazione:

$$z^m = A \cos mx + B \cos i my.$$

- 22.** Condizione necessaria affinchè una superficie possa esser suddivisa in quadrati dalle sue linee di curvatura.
23. Alcune formule.
24. Direzione della più corta distanza fra due rette.
25. Lunghezza di essa.
26. Coordinate dei punti di tali rette che hanno un minimo per reciproca distanza.
27 e 28. Applicazione del n.º 22.
29. Piano centrale.
30. Curvatura media dell'*elicoide gobbo*.
31. Inviluppo di una sfera il cui centro si muove su di una circonferenza data.
32. Superficie inviluppo del piano:

$$lx + my + nz = p$$

essendo i parametri legati da relazioni date.
